

§ 6.9 Espaces vectoriels avec produit scalaire

Idée: généraliser le produit scalaire usuel (dans $\mathbb{R}^n$) à un esp. vecto V .

(NPO: évaluation cours)

Séance
Raq.

vendredi 17
janvier 2025

Déf 6.9.1: Soit V un espace vectoriel $[14^h \text{ à } 16^h]$
(de dim quelconque, y compris $\dim(V) = +\infty$)
on appelle produit scalaire sur V , toute fonction

$$V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(u, v) \longmapsto u \cdot v$$

(autres notations
 $(u|v), \langle u|v \rangle, \dots$)

qui vérifie les cond. suivantes:

1) $u \cdot v = v \cdot u$ (symétrie)

2) $(u+v) \cdot w = u \cdot w + v \cdot w$

3) $(\lambda u) \cdot v = \lambda (u \cdot v) = u \cdot (\lambda v)$

linéarité

$u, v, w \in V$

$\lambda \in \mathbb{R}$

4) $u \cdot u \geq 0_{\mathbb{R}}$ (positivité)

5) $u \cdot u = 0_{\mathbb{R}} \iff u = 0_V$ (non dégénéré)



une fonction qui vérifie 1) 2) 3)
s'appelle une forme bilinéaire symétrique

Cela signifie, que $\forall v \in V$ fixé

la fonction $V \rightarrow \mathbb{R}$ est linéaire

$$u \mapsto u \cdot v$$

(et $u \mapsto v \cdot u$ aussi)

Ex 6.9.2 :

0) $V = \mathbb{R}^n$ $u \cdot v = \sum_{i=1}^n u_i v_i$ $\checkmark$ PS usuel

1) $V = \mathbb{P}_n$ pol. de degré $\leq n$

et soient $t_0, t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}$

$n+1$ points distincts $t_i \neq t_j$
b) $i \neq j$.

$\forall p(t), q(t) \in \mathbb{P}_n$ on pose

$$\langle p | q \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^n p(t_i) q(t_i) \in \mathbb{R}$$

est
un PS

(ex : vérifiez 1) $\rightarrow$ 5) pour ce $\uparrow$)
(facultatif)

$$1') \quad t_0 = -1 \quad t_1 = 0 \quad t_2 = 1$$

$$\mathbb{P}_2 \times \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(p, q) \mapsto \langle p | q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1)$$

$$2) \quad V = M_{n \times n}(\mathbb{R}) \text{ on } \text{pave}$$

$$\langle A | B \rangle = \text{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^n (AB)_{ii}$$

est un PS.

$$3) \quad V = C([a, b]) \quad a < b \in \mathbb{R}$$

$\simeq$ fonct. continues sur $[a, b]$

$$\forall f, g \in C([a, b]) \text{ on } \text{pave}$$

$$\langle f | g \rangle = \int_a^b f(t)g(t) dt \in \mathbb{R}$$

$$(\triangle! \dim(V) = +\infty)$$

$$\langle f | f \rangle = \int_a^b f^2(t) dt \geq 0$$

défini un PS sur V .

3') $V = C([0, 2\pi])$ ← très utilisée
en théorie du signal.

Remarque 6.9.3 : Si V est muni d'un P.S.

alors on peut définir les notions de

- longueur/norme d'un $v \in V$: $\|v\| = \sqrt{\langle v | v \rangle}$
- Cauchy-Schwarz : $= \sqrt{v \cdot v}$

$$|u \cdot v| \leq \|u\| \|v\| \quad \forall u, v \in V$$

- Inégalité du Δ :

$$\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\| \quad \forall u, v \in V$$

- orthogonalité : $u \perp v \Leftrightarrow u \cdot v = 0$

- angles entre u, v (grâce à C-S)

$$\left(\theta = \arccos \left(\frac{\|u\| \|v\|}{|u \cdot v|} \right) \right)$$

- le Thm. de projection orthogonale :

Si $W \subset V$ et $\dim(W)$ est finie

alors il existe une T.L

$\text{proj}_W : V \rightarrow V$ telle que

tg $\text{Im}(\text{proj}_W) = W$

$$\text{Ker}(\text{proj}_W) = W^\perp = \left\{ v \in V \mid \begin{array}{l} v \cdot w = 0 \\ \forall w \in W \end{array} \right\}$$

et il existe une décomp. unique $\forall v \in V$

$$v = \underbrace{\text{proj}_W(v)}_{\in W} + \underbrace{z}_{\in W^\perp}$$

(et $\dim(W) + \dim(W^\perp) = \dim V$)

— le procédé de Gram-Schmidt s'applique
si W est de dim finie: alors W possède
une base
orthogonale

càd $\exists w_1, \dots, w_p \in W$ avec $w_i \perp w_j$
(càd $w_i \cdot w_j = 0$)

— les formules

$$1) \text{proj}_W(v) = \sum_{i=1}^p \left(\frac{v \cdot w_i}{w_i \cdot w_i} \right) w_i$$

si $\{w_1, \dots, w_p\}$ est une base orthog. de W

2) l'alg. de Gram-Schmidt
restent variables

Exemple 6.9.4 : $V = C([0, 2\pi])$

$$\mathcal{F} = \left\{ \cos(nt), \sin(mt) \mid \begin{array}{l} 0 \leq n, m \leq n_0 \\ m \neq 0 \end{array} \right\}$$

^{entiers}
↑
fixé

famille orthogonale
dans $C([0, 2\pi])$.

C'est une base orthogonale (mais pas orthonormée)

de $W = \text{Vect}(\mathcal{F})$ pour le produit scalaire
sur V défini par $\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt$:

si $n_1 \neq n_2$

$$\langle \cos(n_1 t), \cos(n_2 t) \rangle = \int_0^{2\pi} \cos(n_1 t) \cos(n_2 t) dt = 0$$

si $m_1 \neq m_2$ ($m_i \neq 0$)

$$\langle \sin(m_1 t), \sin(m_2 t) \rangle = \int_0^{2\pi} \sin(m_1 t) \sin(m_2 t) dt = 0$$

et $\forall k \neq 0$ on a

$$\langle \cos(kt), \cos(kt) \rangle = \int_0^{2\pi} \cos^2(kt) dt = \pi$$

$$\langle \sin(kt), \sin(kt) \rangle = \int_0^{2\pi} \sin^2(kt) dt = \pi$$

puis $\forall n, m > 0$

$$\langle \cos(nt), \sin(mt) \rangle = \int_0^{2\pi} \cos(nt) \sin(mt) dt = 0$$

et pour $n=0$ $\cos(nt) = 1 \quad \forall t \in [0, 2\pi]$

$$\text{et donc } \langle 1, 1 \rangle = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi$$

Utilité: Coeff. de Fourier d'une fonction

Soit $f \in C([0, 2\pi])$ et $W = \text{vect}(\mathcal{F})$

avec $\mathcal{F}$ base orthogonale pour $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ci-dessus

Alors la formule 1) plus haut s'applique. n_0 fixe

$$\text{proj}_W(f) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos(t) + a_2 \cos(2t) + \dots + a_{n_0} \cos(n_0 t) \\ + b_1 \sin(t) + b_2 \sin(2t) + \dots + b_{n_0} \sin(n_0 t)$$

$$\text{où } \frac{a_0}{2} = \frac{\langle f, 1 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} = \frac{\int_0^{2\pi} f(t) dt}{2\pi} \quad (\text{NB: } 1 = \cos(0t))$$

$$a_k = \frac{\langle f, \cos(kt) \rangle}{\underbrace{\langle \cos(kt), \cos(kt) \rangle}_{= \pi}}$$

$$b_k = \frac{\langle f, \sin(kt) \rangle}{\underbrace{\langle \sin(kt), \sin(kt) \rangle}_{= \pi}}$$

cà d

$$a_k = \frac{\int_0^{2\pi} f(t) \cos(kt) dt}{\pi}$$

$$a_0 = \frac{\int_0^{2\pi} f(t) dt}{\pi}$$

$$b_k = \frac{\int_0^{2\pi} f(t) \sin(kt) dt}{\pi}$$

les a_0, a_k, b_k s'appellent

les coefficients de Fourier de f

et permettent d'approximer f
avec une fonction de W

plus de détails : Analyse n avec $n \geq 2$.